



UNIVERSIDADE DE VIGO
Departamento de Matemática Aplicada II

Cálculo II

E.T.S.I. Telecomunicaciones

Tabla de Integrales

I. Integrales Inmediatas.

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	2) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$	4) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	6) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C$
7) $\int \tan x \, dx = -\ln \cos x + C$	8) $\int \cot x \, dx = \ln \operatorname{sen} x + C$
9) $\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + C$	10) $\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + C$
11) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	12) $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x + C$
13) $\int e^x \, dx = e^x + C$	14) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
15) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	16) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$	18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$
Notas sobre las funciones hiperbólicas: $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad (\text{ver J. de Burgos, p.104})$	

II. Funciones Racionales.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ donde } P(x), Q(x) \text{ son polinomios en la variable } x.$$

II.1) Impropias: $\text{gr}(P) \geq \text{gr}(Q)$; $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\frac{R(x)}{Q(x)}$ fracción propia.

II.2) Propias: $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$; $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como suma de fracciones elementales:

a) Se calculan las RAÍCES de $Q(x)$:

i) Todas REALES y SIMPLES:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

ii) Todas REALES, algunas MÚLTIPLES:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - a_1)} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{r1}}{(x - a_r)} + \\ & + \frac{A_{r2}}{(x - a_r)^2} + \dots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} \end{aligned}$$

iii) Algunas COMPLEJAS SIMPLES:

$$Q(x) = (x^2 + px + q) \dots (x^2 + rx + s)(x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{Cx + D}{x^2 + rx + s} + \dots + \dots$$

iv) Algunas COMPLEJAS MÚLTIPLES: Método de Hermite.

b) Se calculan los COEFICIENTES de los numeradores:

c) Se integran las FRACCIONES ELEMENTALES:

III. Funciones Trigonométricas.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (R \text{ función racional}).$$

III.1) Caso $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

III.2) Caso $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$

III.3) Caso $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: $t = \tan x$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x = \arctan t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

III.4) Cambio trigonométrico universal: $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

III.5) Caso $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ con $m = 2p$, $n = 2q$

$$\text{sustituciones: } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

IV. Funciones Irracionales.

IV.1) $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$, $x = t^k$, $k = \text{m.c.m.}\{n, \dots, s\}$.

IV.2) $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$, $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, $k = \text{m.c.m.}\{n, \dots, s\}$.

IV.3) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, $x = a \sinh t$, $dx = a \cosh t dt$,

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t.$$

$$x = a \tan t, \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

IV.4) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, $x = a \cosh t$, $dx = a \sinh t dt$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t.$$

$$x = a \sec t, \quad dx = a \tan t \sec t dt, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t.$$

IV.5) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $x = a \operatorname{sech} t$, $dx = -a \frac{\sinh t dt}{\cosh^2 t}$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \tanh t.$$

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad dx = a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

V. Funciones cuya primitiva no puede expresarse mediante funciones elementales.

$\int e^{-x^2} dx$	$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$
$\int \frac{\cos x}{x} dx$	$\int \frac{1}{\ln x} dx$
$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x} dx$ con $k \neq \pm 1, k \neq 0$	