PRUEBA FÍSICA I PEP 1

Viernes 18 Julio 2008. Duración 1 hora 50 minutos.

La calculadora es de uso personal. Se deben entregar respuestas numéricas con sus unidades cuando corresponda. Utilice 3 decimales en sus cálculos. El orden y claridad de sus explicaciones son importantes para la corrección. **Las figuras debe hacerlas en su desarrollo**.

1. Considerando la masa y radio terrestres, la masa lunar y distancia ***d*** entre sus centros, dados abajo y suponiendo que ellos orbitan en circunferencias respecto al centro de masas, determine numéricamente:
    a. El periodo del sistema en días.
    b. Las distancias del centro de masa al centro de la Tierra y al centro de la Luna.
    c. La aceleración del centro de la Luna hacia el centro de masa.

---

2. Un plano pasa por tres puntos cuyas posiciones están en $A = (1,1,1)$, $B = (3,-1,3)$, $C = (-1,2,2)$. Determine:
    a. Los lados del triángulo.
    b. Los ángulos del triángulo.
    c. El área del triángulo.
    d. Un vector normal al plano del triángulo.
    e. La ecuación cartesiana del plano que contiene el triángulo.
    f. La distancia del plano al origen.

---

3. Sobre un cuerpo rígido actúan las fuerzas $\vec{F}_1 = (5,3,-2), \vec{F}_2 = (-5,-3,2), \vec{F}_3 = (-3,5,3)$ en los puntos cuyas coordenadas son $\vec{r}_1 = (4,2,-4), \vec{r}_2 = (3,-2,2), \vec{r}_3 = (-3,1,4)$. Determine (a) la fuerza resultante, y (b) el torque resultante respecto al punto $P = (1,1,1)$.

---

4. Sobre un cuerpo rígido actúan las fuerzas $\vec{F}_1 = (0,0,-2), \vec{F}_2 = (0,0,2), \vec{F}_3 = (0,0,4)$ en los puntos cuyas coordenadas son $\vec{r}_1 = (4,2,-4), \vec{r}_2 = (3,-2,2), \vec{r}_3 = (-3,1,4)$. Determine (a) la fuerza resultante, y (b) las coordenadas del centro de fuerzas paralelas.

FORMULAS

$$G = 6.673\times10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, \quad a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2}R, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad R^3 = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}T^2, \quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \vec{r}\cdot\hat{n} = d, \quad A = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$M_T = 5,98\times10^{24} kg, \quad R_T = 6,378\times10^6 m, \quad d = 3,84\times10^8 m \; M_L = 7.36\times10^{22} kg, \quad G = 6.673\times10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Pauta PEP1 2008
Física I Plan anual

Hay un punto (1p), base y se le suman los indicados. Si alguien no llega al resultado correcto en cada letra, evalúe el error cometido, y el puntaje que le corresponde.

1. Datos

$$\begin{aligned} G &= 6.673 \times 10^{-11},\ d = 3.84 \times 10^{8}\,\mathrm{m} \\ M_T &= 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad M_L = 7.36 \times 10^{22}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

a) Periodo

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G(M_T + M_L)}} = 2352389.770\,\mathrm{s} = 27.227\,\mathrm{d} \qquad (2\ \mathrm{p})$$

b)

$$\begin{aligned} d_{TG} &= \frac{M_L}{M_T + M_L} d = 4668693.0\,\mathrm{m} && (1\ \mathrm{p}) \\ d_{LG} &= \frac{M_T}{M_T + M_L} d = 379331307.0\,\mathrm{m} && (1\ \mathrm{p}) \end{aligned}$$

c) la aceleración será

$$a_{LG} = \frac{v_L^2}{d_{LG}} = \frac{(\frac{2\pi d_{LG}}{T})^2}{d_{LG}} = 2.706 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad (2\ \mathrm{p})$$

2. Un triángulo tiene sus vértives en los puntos en las coordenadas

$$A = (1,1,1), \quad B = (3,-1,3), \quad C = (-1,2,2)$$

Determine, lados, área, ángulos, luego

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}, \quad \overrightarrow{BC} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}, \quad \overrightarrow{AC} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

luego

a) los lados serán:

$$c = 2\sqrt{3} = 3.464\,, \quad a = \sqrt{26} = 5.099, \quad b = \sqrt{6} = 2.449 \qquad ((a)\ 1p)$$

c) el área

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|-4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}\right| && ((b)\ 1p) \\ &= \sqrt{14} = 3.74 \end{aligned}$$

b) Los ángulos estarán aproximadamente dados por

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}, \quad \overrightarrow{BC} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}, \quad \overrightarrow{AC} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{bc} = \frac{-4-2+2}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{9}\sqrt{6}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 118.13 \\
\cos\beta &= \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{ca} = \frac{8+6+2}{2\sqrt{3}\times\sqrt{26}} = \\
\frac{4}{39}\sqrt{3}\sqrt{26} &= 0.905\,8 \Rightarrow \beta = 25.\,068\,7^{o} \qquad (1) \\
\cos\gamma &= \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{ba} = \frac{8+3-1}{\sqrt{6}\times\sqrt{26}} = \\
\frac{5}{78}\sqrt{6}\sqrt{26} &= 0.801 \Rightarrow \gamma = 36.\,774 \qquad (2) \\
& \text{los tres ángulos} \qquad ((c)\ 1p)
\end{aligned}$$

d) un vector unitario (no se pide unitario) normal al plano será

$$\hat{n} = \pm\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|} = \pm\frac{4\hat{\imath}+6\hat{\jmath}+2\hat{k}}{2\sqrt{14}} \qquad (d)\ 1p)$$

l

e) f) la ecuación del plano será

$$\vec{r}\cdot\hat{n} = \frac{4x+6y+2z}{2\sqrt{14}} = d$$

pero plano pasa por el punto $(1,1,1)$ luego

$$d = \frac{4+6+2}{2\sqrt{14}} = 1.\,604 \qquad (f)\ 1p)$$

luego la ecuación del plano es

$$2x + 3y + z = 6 \qquad (e)\ 1p)$$

3. Sobre un cuerpo rígido actúan las fuerzas

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}, \\
\vec{F}_2 &= -5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k} \\
\vec{F}_3 &= -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}
\end{aligned}$$

en los puntos

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}, \\
\vec{r}_2 &= 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k} \\
\vec{r}_3 &= -3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}
\end{aligned}$$

La fuerza resultante será

$$\vec{F} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

el torque respecto a un punto $P = (1, 1, 1)$ será

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_P &= (3, 1, -5) \times (5, 3, -2) + (2, -3, 1) \times (-5, -3, 2) + (-4, 0, 3) \times (-3, 5, 3) \\ &= (-5, -25, -37)\end{aligned}$$

4 Tenemos

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}, \\ \vec{r}_2 &= 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k} \\ \vec{r}_3 &= -3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -2\hat{k}, \\ \vec{F}_2 &= 2\hat{k} \\ \vec{F}_3 &= 4\hat{k}\end{aligned}$$

entonces

$$\vec{F} = 4\hat{k} \qquad \text{(a) 3p)}$$

y las coordenadas del centro de fuerzas son

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{4 \times (-2) + 3 \times (2) + (-3) \times 4}{4} = \qquad \text{(b/2) 1.5p)} \\ -\frac{7}{2} &= -3.5 \\ y_C &= \frac{2 \times (-2) + (-2) \times (2) + (1) \times 4}{4} = -1 \text{ (b/2) 1.5 p)}\end{aligned}$$

: :