PRUEBA FÍSICA I PEP 1

Viernes 28 Mayo 2010. Duración 1 hora 30 minutos.

La calculadora es de uso personal. Se deben entregar respuestas numéricas con sus unidades cuando corresponda. Utilice 3 decimales en sus cálculos. El orden y claridad de sus explicaciones son importantes para la corrección. **Las figuras son obligatorias y debe hacerlas en su desarrollo**.

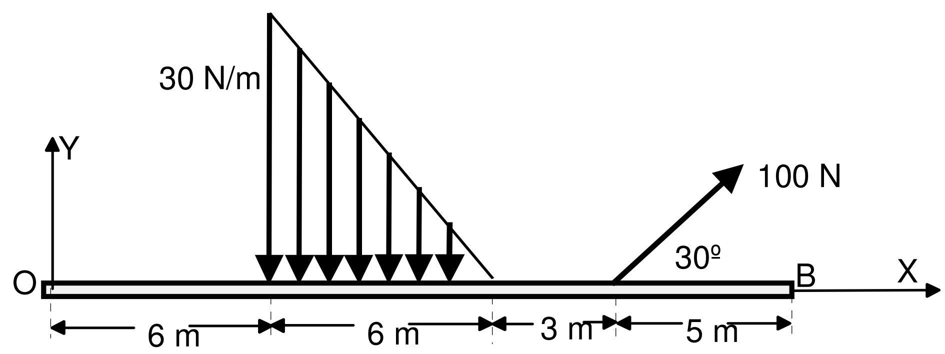
1. Considere dos planetas iguales con igual masa a la terrestre $M_T = 5{,}98\times10^{24}kg$ siendo la distancia entre sus centros $d = 3{,}84\times10^{8}m$, y suponiendo que ellos orbitan en circunferencias respecto al centro de masas supuesto fijo, determine numéricamente:
   a. Las magnitudes de las aceleraciones de los centros de ambos planetas.
   b. El periodo o tiempo que emplea cada planeta en dar una vuelta completa.
   c. Las rapideces de los centros de cada planeta.
   d. Determine la fuerza gravitacional resultante que experimenta un pequeño cuerpo de masa $100kg$ ubicado antre ambos planetas a distancia $10^{8}m$ del centro de uno de ellos.

---

2. Un plano pasa por tres puntos cuyas posiciones (coordenadas en metros) están en $A = (1,3,10), \quad B = (0,3,10), C = (2,1,0)$. Se pide
   a. El área del triángulo *ABC.*
   b. Los ángulos del triángulo *ABC.*
   c. La ecuación de ese plano.
   d. La distancia de ese plano al origen.

---

3. Sobre una barra rígida OB actúan una fuerza distribuida que varía linealmente como se indica en la figura con un máximo de 30 N/m. Además actúa una fuerza de 100 N inclinada en 30º en el punto que se indica. Determine (a) el torque resultante respecto al punto B, y (b) el torque resultante respecto al punto O.



---

4. Sobre un cuerpo rígido actúan las fuerzas $\vec{F}_1 = (0,-4,0), \vec{F}_2 = (0,3,0), \vec{F}_3 = (0,4,0), , \vec{F}_4 = (0,4,0)$ en los puntos cuyas coordenadas son $\vec{r}_1 = (4,0,2), \vec{r}_2 = (4,0,-2), \vec{r}_3 = (-2,0,1), \vec{r}_4 = (2,0,-1)$. Determine
   a. La fuerza resultante
   b. El torque resultante respecto al origen
   c. Las coordenadas (x,z) del centro de fuerzas paralelas.
   d. El torque resultante respecto al centro de fuerza.

FORMULAS

$$G = 6.673\times10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}, \quad a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2}R, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad R^3 = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}T^2, \quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \vec{r}\cdot\hat{n} = d, \quad A = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{r}\times\vec{F} \quad x_C = \frac{\sum x_iF_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_iF_i}{\sum F_i}$$

Pauta PEP1 2010
Física I Plan anual

Hay un punto (1p), base y se le suman los indicados. Si alguien no llega al resultado correcto en cada letra, evalúe el error cometido, y el puntaje que le correspondería, menor al máximo indicado.

1. Datos

$$\begin{aligned} G &= 6.673 \times 10^{-11},\ d = 3.84 \times 10^{8}\,\mathrm{m} \\ M_1 &= M_2 = M = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

a) las aceleraciones magnitudes de las aceleraciones son iguales

$$a = \frac{G\frac{MM}{d^2}}{M} = 2.706\ \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{(a) 1.5 p)}$$

b) hay muchos caminos. Uno de ellos es despejando de la fórmula dada

$$T = \sqrt{4\pi^2 \frac{d^3}{2GM}} = 1.674 \times 10^{6}\,\mathrm{s} \qquad \text{(b) 1.5 p)}$$

c) las rapideces son iguales y las despejamos de

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{(d/2)} \\ v &= \sqrt{\frac{ad}{2}} = 720.80\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \qquad \text{(c) 1.5 p)}$$

d) es muy simple, con $m = 100$

$$F = \frac{GMm}{(10^8)^2} - \frac{GMm}{(d - 10^8)^2} = 3.496\,\mathrm{N} \qquad \text{(d) 1.5 p)}$$

2. Un plano pasa por

$$A = (1,3,10),\quad B = (0,3,10),\ C = (2,1,0)$$

Construimos vectores sobre lados del triángulo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (2,1,0) - (1,3,10) = (1,-2,-10) \\ \overrightarrow{BC} &= (2,1,0) - (0,3,10) = (2,-2,-10) \\ \overrightarrow{AB} &= (0,3,10) - (1,3,10) = (-1,0,0) \end{aligned}$$

a) el área será

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|(-1,0,0) \times (1,-2,-10)\right| = \frac{1}{2}\left|(0,-10,2)\right| = \\ &= \sqrt{26} = 5.099 \end{aligned} \qquad \text{(a) 1.5 p)}$$

b) los ángulos los despejamos de

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{105}} = -9.759\,001\times 10^{-2}, \quad \alpha = 95.60$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{2}{\sqrt{108}} = 0.192\,450\,1, \quad \beta = 78.90$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{106}{\sqrt{105}\sqrt{108}} = 0.995\,403\,9, \quad \gamma = 5.50$$ (b) 1.5 p)

del cálculo del área tenemos un vector normal

$$\vec{N} = (0, -10, 2)$$

luego

$$\hat{n} = \frac{10\hat{\jmath} - 2\hat{k}}{\sqrt{104}}$$

la ecuación del plano será

$$\frac{10y - 2z}{\sqrt{104}} = d$$

pero el plano pasa por el punto $C = (2, 1, 0)$ luego

$$d = \frac{10}{\sqrt{104}} = 0.981$$ (d) 1.5 p)

y

$$5y - z = 5$$ (c) 1.5 p)

3. (a) (3 puntos) La fuerza distribuida equivale al área de la distribución es

$$A = \frac{1}{2}30\times 6 = 90\,\mathrm{N}$$
$$\vec{F} = -90\hat{\jmath}$$

y su posición es

$$x = 6 + 2 = 8\,\mathrm{m}$$

luego

$$\vec{\Gamma}_B = -5\hat{\imath}\times 100\sin 30\hat{\jmath} + (-12\hat{\imath})\times(-90\hat{\jmath}) = -830\hat{k}\,\mathrm{N\,m}$$ (a) 3 p)

$$\vec{\Gamma}_O = 15\hat{\imath}\times 100\sin 30\hat{\jmath} + (8\hat{\imath})\times(-90\hat{\jmath}) = 30\hat{k}\,\mathrm{N\,m}$$ (b) 3 p)

4 Tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (4,0,2), \\
\vec{r}_2 &= (4,0-2) \\
\vec{r}_3 &= (-2,0,1) \\
\vec{r}_4 &= (2,0,-1)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (0,-4,0) \\
\vec{F}_2 &= (0,3,0) \\
\vec{F}_3 &= (0,4,0) \\
\vec{F}_4 &= (0,4,0)
\end{aligned}$$

entonces la fuerza resultante es

$$\vec{F} = (0,7,0) = 7\hat{\jmath} \qquad \text{(a) 1.5 p)}$$

el torque resultante respecto al origen será

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}_O &= (4,0,2)\times(0,-4,0) + (4,0,-2)\times(0,3,0) + (-2,0,1)\times(0,4,0) + (2,0,-1)\times(0,4,0) \\
&= (8,0,-16) + (6,0,12) + (-4,0,-8) + (4,0,8) \\
&= (14,0,-4)\ \mathrm{N\,m} \qquad \text{(b) 1.5 p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{4\times(-4) + 4\times(3) + (-2)\times(4) + (2)\times(4)}{7} = -\frac{4}{7} = -0.571 \\
z_C &= \frac{2\times(-4) + (-2)\times(3) + (1)\times(4) + (-1)\times(4)}{7} = -2 \qquad \text{(c) 1.5 p)}
\end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}_O = 0\,\mathrm{N\,m} \qquad \text{(d) 1.5 p)}$$