

PAUTA PEP 1 Física I Plan anual

1) Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, y $C = (1, -1, 1)$. Determine:

- a) Las longitudes de los lados del triángulo b) Los ángulos del triángulo
c) El área del triángulo

Solución: **Hay un punto (1p), base** y se le suman:

Construimos vectores a lo largo de los lados

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{BC} &= (1, -1, 1) - (2, 2, 2) = (-1, -3, -1) \\ \overrightarrow{CA} &= (1, 1, 1) - (1, -1, 1) = (0, 2, 0)\end{aligned}\tag{2p}$$

de donde las longitudes de los lados son

(a)

$$\begin{aligned}AB &= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3} = 1.732\,1 \\ BC &= \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11} = 3.316\,6 \\ CA &= 2\end{aligned}\tag{1p}$$

(b)

ahora calculamos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (1, 1, 1) \cdot (0, -2, 0) = -2 \\ \cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -0.577\,35 \\ \alpha &= 2.186\,3rad = 125.27^\circ\end{aligned}\tag{1p}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= -(1, 1, 1) \cdot (-1, -3, -1) = 5 \\ \cos \beta &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = 0.870\,39 \\ \beta &= 0.514\,8rad = 29.496^\circ\end{aligned}\tag{1p}$$

con dos ángulos es suficiente, de todos modos se calcula el tercero por si alguien siguió otro orden

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= -(0, 2, 0) \cdot (-1, -3, -1) = 6 \\ \cos \gamma &= \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{6}{2\sqrt{11}} = 0.904\,53 \\ \gamma &= 0.440\,52 rad = 25.240^\circ\end{aligned}$$

alternativa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (2, 0, -2) \\ \sin \alpha &= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 0.816\,50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} &= -(1, 1, 1) \times (-1, -3, -1) = -(2, 0, -2) \\ \sin \beta &= \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = 0.492\,37\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} &= -(0, 2, 0) \times (-1, -3, -1) = -(-2, 0, 2) \\ \sin \gamma &= \frac{|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = 0.426\,4\end{aligned}$$

Naturalmente suponemos que el alumno sabe que $\alpha + \beta + \gamma = 180$
(chequeo $125.27 + 29.496 + 25.240 = 180.01$)

(c)

Para obtener el área del triángulo calculamos por ejemplo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} &= (1, 1, 1) \times (-1, -3, -1) = (2, 0, -2) \\ A &= \frac{1}{2} |(2, 0, -2)| = \frac{1}{2} \sqrt{4+4} = \sqrt{2} = 1.414\,2\end{aligned}\tag{1p}$$

2) Imagine un hipotético planeta de masa $M = 10^{20}$ kg de radio $R = 1000$ km en torno al cual un satélite de masa $m = 1$ kg está en órbita circular de radio $r = 1500$ km. Determine

- a) La rapidez del satélite,
- b) El periodo del satélite
- c) La magnitud de la aceleración del satélite
- d) La velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie del planeta

Solución: **Hay un punto (1p), base** y se le suman:
por ser demasiado trivial daremos directamente los resultados

a)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67259 \times 10^{-11} \times 10^{20}}{1500 \times 10^3}} = 66.696 \text{ m s}^{-1} \quad (2p)$$

b)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 1500 \times 10^3}{66.696} = 1.4131 \times 10^5 \text{ s} \quad (2p)$$

o usando la ley de Kepler mismo puntaje

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67259 \times 10^{-11} \times 10^{20}} (1500 \times 10^3)^3} = 1.4131 \times 10^5 \text{ s}$$

c)

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} = \frac{6.67259 \times 10^{-11} \times 10^{20}}{(1500 \times 10^3)^2} = 2.9656 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \quad (1p)$$

d)

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2 \frac{6.67259 \times 10^{-11} \times 10^{20}}{1000 \times 10^3}} = \\ &= 115.52 \text{ m s}^{-1} = 415.87 \text{ km h}^{-1} \end{aligned} \quad (1p)$$

3) Dados los vectores $\vec{a} = (1, -1, 0) = \hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{b} = (2, 1, 0) = 2\hat{i} + \hat{j}$, evalúe

a) $2\vec{a} - 3\vec{b}$, b) Los módulos o magnitudes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, d) $\vec{a} \times \vec{b}$

e) Un vector unitario perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Solución: **Hay un punto (1p), base** y se le suman:
por ser demasiado trivial daremos directamente los resultados

a)

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - 3\vec{b} &= 2(1, -1, 0) - 3(2, 1, 0) \\ &= (-4, -5, 0) = -4\hat{i} - 5\hat{j} \end{aligned} \quad (2p)$$

b)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1.414\,2 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2.236\,1 \end{aligned} \quad (1p)$$

y

c)

$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(2, 1, 0) \cdot (1, -1, 0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707\,11 \quad (1p)$$

d)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 0) \times (2, 1, 0) = (0, 0, 3) \quad (1p)$$

e)

$$\hat{n} = (0, 0, 1) \quad (1p)$$