

FÍSICA I PEP 1

Sábado 27 Abril 2002 10:30 horas. Duración 2:00 horas.

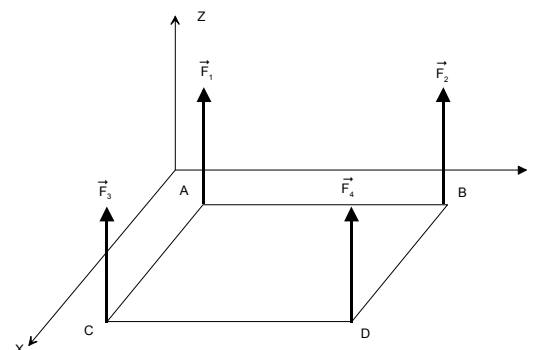
La calculadora es de uso personal. Se deben entregar respuestas numéricas con sus unidades cuando corresponda. Utilice 3 decimales y tome $g = 10 \text{ ms}^{-2}$. El orden y claridad de sus explicaciones son importantes para la corrección.

- Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente $M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $M_L = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$, siendo la distancia promedio entre sus centros $3.84 \times 10^8 \text{ m}$. Determine
 - El periodo orbital de la Luna en días, considerando a la Tierra fija.
 - El periodo orbital de la Luna en días, considerando que ambos cuerpos orbitan en torno a su centro de masa.
 - El punto entre la Tierra y la Luna donde otro cuerpo no es atraído hacia ninguno de los dos primeros.
 - La magnitud de la aceleración de la Luna.

- Los vértices de un triángulo son los puntos A: (-3,2,1), B: (1,-3,5) y C: (2,1,-4). Determine:
 - El área del triángulo.
 - Los ángulos del triángulo.
 - Un vector unitario perpendicular al plano que contiene el triángulo
 - La proyección del lado AC sobre el lado AB.

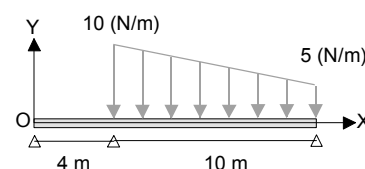
- Una lámina rectangular ABCD que está sobre el plano OXY como se muestra en la figura, está sometida a cuatro fuerzas verticales en sus vértices de magnitudes $F_1 = 10 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$, $F_3 = 2 \text{ N}$ y $F_4 = 2 \text{ N}$. Las coordenadas de los vértices son A = (1,1,0), B = (1,5,0), C = (3,1,0) y D = (3,5,0). Determine:

- Las coordenadas del centro de Fuerza.
- El torque resultante de las cuatro fuerzas respecto al origen del sistema de coordenadas.



- Considere la fuerza distribuida de la figura. Determine

- La coordenada X del centro de Fuerza.
- El torque de la fuerza resultante respecto al punto O.



FORMULAS

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad R^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} T^2, \quad \vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$x_F = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \quad y_F = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}, \quad \vec{r}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}}{F^2}, \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \vec{r}_{CM} = \frac{A_1 \vec{r}_1 + A_2 \vec{r}_2}{A_1 + A_2}$$

Pauta Pep1 2002

En cada problema un punto base más los indicados

- a) Si la Tierra está fija con $R = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
 $M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ $M_L = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}} = 2.367 \times 10^6 \text{ s} = \frac{2.367 \times 10^6}{24 \times 3600} = 27.40 \text{ d} \quad (1.5\text{p})$$

- b) Si ambos cuerpos orbitan respecto al centro de masa

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G(M_T + M_L)}} = 2.352 \times 10^6 \text{ s} = \frac{2.352 \times 10^6}{24 \times 3600} = 27.22 \text{ d} \quad (1.5\text{p})$$

- c) Sea x la distancia al centro de la Tierra y m la masa del cuerpo, entonces debe ser

$$G \frac{M_T m}{x^2} = G \frac{M_L m}{(R-x)^2}$$

de donde

$$x = \frac{R}{1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} = 3.457 \times 10^8 \text{ m} \quad (1.5\text{p})$$

- d) Por cualquier camino, por ejemplo

$$F = G \frac{M_T M_L}{R^2} = M_L a_L \implies a_L = G \frac{M_T}{R^2} = 2.706 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.5\text{p})$$

2. Construimos los vectores

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, -3, 5) - (-3, 2, 1) = (4, -5, 4)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, -4) - (-3, 2, 1) = (5, -1, -5)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2, 1, -4) - (1, -3, 5) = (1, 4, -9)$$

$$(2, 1, -4) - (1, -3, 5) = (1, 4, -9)$$

- a) Hagamos $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, -5, 4) \times (5, -1, -5) = (29, 40, 21)$, de donde el área será

$$A = \frac{1}{2} |(29, 40, 21)| = \frac{1}{2} \sqrt{29^2 + 40^2 + 21^2} = 26.84 \quad (1.5\text{p})$$

- b) De lo anterior

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{29^2 + 40^2 + 21^2}}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2} \sqrt{5^2 + 1^2 + 5^2}} = 0.9957$$
$$\alpha = 84.68^\circ \quad (0.5\text{p})$$

$$\sqrt{29^2 + 40^2 + 21^2} = \sqrt{2882}, \sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{57}, \sqrt{5^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{51}$$

c) De la letra (a)

$$\hat{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{(29, 40, 21)}{\sqrt{2882}} = (0.540\ 2, 0.745\ 1, 0.391\ 2) \quad (1.5p)$$

d) la proyección será

$$\vec{AC} \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(5, -1, -5) \cdot (4, -5, 4)}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{57}} = 0.662\ 3 \quad (1.5p)$$

3. Usamos

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$$

$$y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}$$

resultando

a)

$$x_C = \frac{1 \times 10 + 1 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 2}{10 + 5 + 2 + 2} = \frac{27}{19} = 1.421 \quad (1.5p)$$

$$y_C = \frac{1 \times 10 + 5 \times 5 + 1 \times 2 + 5 \times 2}{10 + 5 + 2 + 2} = \frac{47}{19} = 2.474 \quad (1.5p)$$

b) El torque será

$$\vec{\Gamma} = (1.421, 2.474, 0) \times (0, 0, 19) = (47.01, -27.00, 0) \quad (3p)$$

4. El centroide de la figura está ubicado a distancia

$$\frac{\frac{10}{3} \times 25 + 5 \times 50}{25 + 50} = \frac{40}{9} = 4.444$$

del extremo izquierdo, de manera que el centro de fuerza está en

a)

$$x = 4 + 4.444 = 8.444\text{ m} \quad (3p)$$

y la fuerza resultante es de magnitud el área, es decir

$$F = A = 25 + 50 = 75\text{ N}$$

luego el torque es

b)

$$\vec{\Gamma} = 8.444\hat{i} \times (-75\hat{j}) = -633.3\hat{k} \quad (3p)$$

- calcular sólo la magnitud, rebajar un punto.