

PAUTA PEP 1 2005 Física I Plan anual

Hay un punto (1p), base y se le suman los indicados. Si alguien no llega al resultado correcto en cada letra, evalúe el error cometido, y el puntaje que le corresponde.

1.- Las masas de los planeta son $M_1 = 2 \times 10^{20}$ kg y $M_2 = 10^{20}$ kg siendo la distancia entre sus centros $R = 2 \times 10^7$ m. $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

a) las distancias al centro de masa son

$$R_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R = \frac{2}{3} \times 10^7 \text{ m}, \quad R_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} R = \frac{4}{3} \times 10^7 \text{ m} \quad (\text{a}) \text{ 1p}$$

b) El período de ambos estará dado por

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}} = 3.972 \times 10^6 \text{ s} \quad (\text{b}) \text{ 1.5 p}$$

c) La rapidez de cada uno puede obtenerse (usted revisa otras formas)

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} = 10.546 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = \frac{2\pi R_2}{T} = 21.092 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{c}) \text{ 1.5 p}$$

d) La fuerza será de magnitud

$$F = G \frac{M_1 M_2}{R^2} = 3.337 \times 10^{15} \text{ N} \quad (\text{d}) \text{ 1 p}$$

e) La magnitud de la aceleración de cada uno será

$$a_1 = \frac{F}{M_1} = 0.0000167 \text{ m s}^{-2}, \quad a_2 = \frac{F}{M_2} = 0.0000334 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{e}) \text{ 1 p}$$

2.- Los vértices de un triángulo son los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 7, 0)$, y $C = (0, 0, 7)$. Vectores a lo largo de los lados serán

a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, 7, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 7, 0) \\ \overrightarrow{BC} &= (0, 0, 7) - (0, 7, 0) = (0, -7, 7) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 0, 7) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 7) \end{aligned} \quad (1.0 \text{ p})$$

b) El área del triángulo. Hacemos un producto cruz

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} |(-3, 7, 0) \times (-3, 0, 7)| = \\ &= \frac{1}{2} |(49, 21, 21)| = \frac{1}{2} \sqrt{49^2 + 21^2 + 21^2} = \frac{7}{2} \sqrt{67} = 28.640 \text{ m}^2 \text{ (1.0 p)} \end{aligned}$$

Otras alternativas, para la corrección son $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (-3, 7, 0) \times (0, -7, 7) = (49, 21, 21)$, $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-3, 7, 0) \times (0, -7, 7) = (49, 21, 21)$.

d) los lados del triángulo $(-3, 7, 0) \cdot (-3, 0, 7) = 9$

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7.616 \text{ m} \quad (0.5 \text{ p})$$

$$\left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} = 9.899 \text{ m} \quad (0.5 \text{ p})$$

$$\left| \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7.616 \text{ m} \quad (0.5 \text{ p})$$

c) Los ángulos del triángulo $(-3, 0, 7) \cdot (0, -7, 7) = 49$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left| \overrightarrow{AB} \right| \left| \overrightarrow{AC} \right|} = \frac{9}{\sqrt{58}\sqrt{58}} = 0.155 \Rightarrow \alpha = 81.083^\circ (0.5 \text{ p})$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left| \overrightarrow{BA} \right| \left| \overrightarrow{BC} \right|} = \frac{49}{\sqrt{58}7\sqrt{2}} = 0.650 \Rightarrow \beta = 49.458^\circ (0.5 \text{ p})$$

$$\cos \gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left| \overrightarrow{CA} \right| \left| \overrightarrow{CB} \right|} = \frac{49}{\sqrt{58}7\sqrt{2}} = 0.650 \Rightarrow \gamma = 49.458^\circ (0.5 \text{ p})$$

e) Con los productos cruz realizados en (b)

$$\hat{n} = \pm \frac{(49, 21, 21)}{|(49, 21, 21)|} = \pm \frac{(7, 3, 3)}{\sqrt{67}} = \pm (0.855, 0.367, 0.367) \quad (1.0 \text{ p})$$

3.- Con relación al enunciado y figura de la prueba y siendo las coordenadas (o vectores posición) $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 7, 0)$, $C = (0, 0, 7)$

a) luego

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (0, 7, 0) + (3, 0, 0) - (0, 0, 7) \\ &= (3, 7, -7)\end{aligned}\quad (1.5 \text{ p})$$

b) Vectores a lo largo de dos lados serán

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= (3, 0, 0) - (0, 7, 0) = (3, -7, 0) \\ \overrightarrow{CB} &= (0, 7, 0) - (0, 0, 7) = (0, 7, -7)\end{aligned}$$

Ahora el área será

$$\begin{aligned}A &= \left| \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} \right| = |(3, -7, 0) \times (0, 7, -7)| \\ &= |(49, 21, 21)| = 7\sqrt{67} = 57.297 \text{ m}^2\end{aligned}\quad (1.5 \text{ p})$$

c) la longitud de la recta CD será

$$\begin{aligned}CD &= \left| \overrightarrow{CD} \right| = \left| \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \right| = |(3, 7, -7) - (0, 0, 7)| = |(3, 7, -14)| \\ &= \sqrt{254} = 15.937 \text{ m}\end{aligned}\quad (1.5 \text{ p})$$

d) la longitud de la recta AB será

$$\begin{aligned}AB &= \left| \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \right| = |(0, 7, 0) - (3, 0, 0)| = |(-3, 7, 0)| \\ &= \sqrt{58} = 7.616 \text{ m}\end{aligned}\quad (1.5 \text{ p})$$

Problemas (2) y (3). No castigar si faltan unidades pues son triviales....